Funktionale Abhängigkeiten Aufgabe B2 - Lösungserwartung

1.0 Die Parabel p mit dem Scheitelpunkt S(2|−3) verläuft durch den Punkt P(−2|−1), die Gerade g hat die Gleichung $y = -0{,}25x + 2{,}5$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0{,}125x^2 - 0{,}5x - 2{,}5$ besitzt.
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Für die Zeichnung gilt: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leqq x \leqq 8$; $-4 \leqq y \leqq 4$.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes S und des Punktes P in die Scheitelform der Parabel $y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ einsetzen und darüber den Öffnungsfaktor a der Parabel bestimmen.
Anschließend die Scheitelform in die allgemeine Form der Parabel umformen.

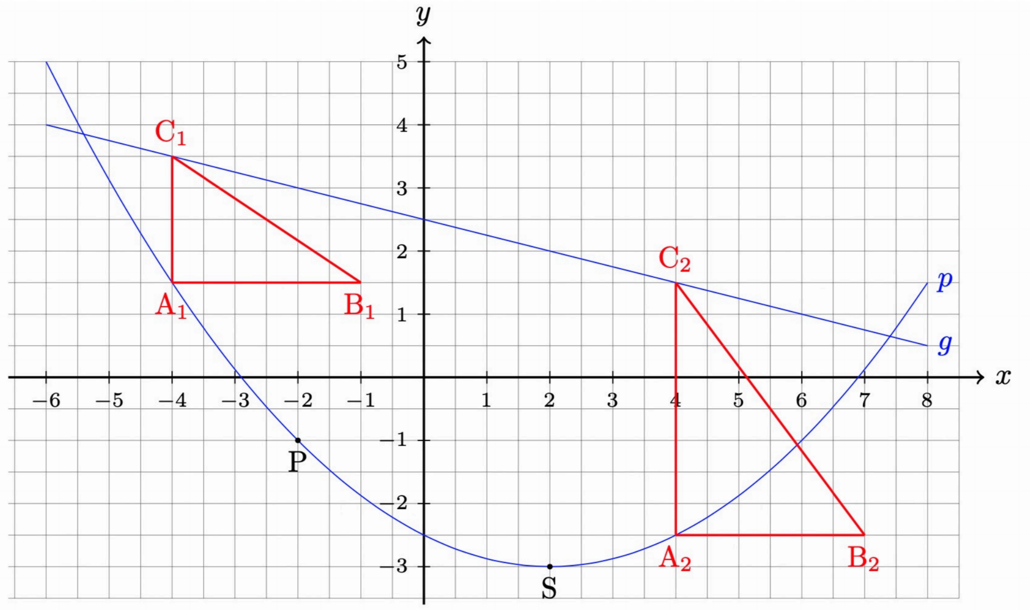
$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$:

$$-1 = a \cdot (-2-2)^2 - 3 \quad | +3$$
$$2 = a \cdot 16 \quad | : 16$$
$$a = \underline{\underline{0{,}125}}$$

$\Rightarrow$ p:
$$y = 0{,}125 \cdot (x-2)^2 - 3$$
$$= 0{,}125 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 3$$
$$= \underline{\underline{0{,}125x^2 - 0{,}5x - 2{,}5}}$$

1.2 Die Punkte $A_n(x|0{,}125x^2 - 0{,}5x - 2{,}5)$ auf der Parabel p und die Punkte $C_n(x|-0{,}25x + 2{,}5)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n die Eckpunkte von rechtwinkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit der Hypotenuse $[B_nC_n]$. Die Abszisse der Punkte B_n ist um 3 größer als die Abszisse x der Punkte A_n und C_n.

Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1B_1C_1$ für $x = -4$ und $A_2B_2C_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem ein.



1.3 Ermitteln Sie durch Rechnung, für welche Werte von x es Dreiecke $A_nB_nC_n$ gibt. Geben Sie das Intervall für x an.

Dreiecke $A_nB_nC_n$ existieren für x-Werte zwischen den Schnittpunkten von Parabel und Geraden.

$g \cap p$: $\quad -0{,}25x + 2{,}5 = 0{,}125x^2 - 0{,}5x - 2{,}5$

$\quad 0 = 0{,}125x^2 - 0{,}25x - 5$

$a = 0{,}125 \qquad D = b^2 - 4ac$

$b = -0{,}25 \qquad = (-0{,}25)^2 - 4 \cdot 0{,}125 \cdot (-5)$

$c = -5 \qquad = 2{,}5625$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{(0{,}25 \pm \sqrt{2{,}5625})}{(2 \cdot 0{,}125)} \qquad x_1 = -5{,}40 \quad x_2 = 7{,}40$$

Intervall: $\underline{x \in \,]-5{,}40\,;\,7{,}40[}$

1.4 Bestätigen Sie, dass für die Länge der Strecken [A_nC_n] in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$\overline{A_nC_n}(x) = [-0{,}125x^2 + 0{,}25x + 5] \text{ LE}$$

Die Punkte A_n und C_n haben dieselbe Abszisse (x-Wert), d. h. sie liegen im KOSY senkrecht übereinander.

$$\overline{A_nC_n}(x) = y_{oben} - y_{unten} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$= [-0{,}25x + 2{,}5 - (0{,}125x^2 - 0{,}5x - 2{,}5)] \text{ LE}$$

$$= [-0{,}25x + 2{,}5 - 0{,}125x^2 + 0{,}5x + 2{,}5] \text{ LE}$$

$$= \underline{\underline{[-0{,}125x^2 + 0{,}25x + 5] \text{ LE}}}$$

1.5 Erstellen Sie einen Term für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_nB_nC_n$ in Abhängigkeit von der Absizze x der Punkte A_n. Bestimmen Sie anschließend den maximalen Flächeninhalt A_{max} der Dreiecke $A_nB_nC_n$ sowie den zugehörigen Wert für x.

Da zwei Seiten der Dreiecke parallel zu den Achsen des Koordinatensystems verlaufen, müssen für die Flächenberechnung keine Vektoren benutzt werden, sondern es kann die Formel A = 0,5·g·h verwendet werden.

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_nB_n} \cdot \overline{A_nC_n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot [-0{,}125x^2 + 0{,}25x + 5] \text{ FE}$$

$$= \underline{\underline{[-0{,}1875x^2 + 0{,}375x + 7{,}5] \text{ FE}}}$$

$a = -0{,}1875$

$b = 0{,}375$

$c = 7{,}5$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}375}{2 \cdot (-0{,}1875)} = 1$$

$$A_{max} = c - \frac{b^2}{4a} = 7{,}5 - \frac{0{,}375^2}{4 \cdot (-0{,}1875)}$$

$$= 7{,}6875$$

$$\underline{\underline{A_{max} = 7{,}69 \text{ FE} \quad \text{für } x = 1}}$$

1.6 Unter den Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$. Bestimmen Sie durch Rechnung die zugehörigen Werte für x.

Die Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig, wenn die Länge der Seiten $[A_nC_n]$ und $[A_nB_n]$ gleich sind.

$\overline{A_nC_n} = 3\,LE$:

$$-0{,}125x^2 + 0{,}25x + 5 = 3 \quad |-3$$
$$-0{,}125x^2 + 0{,}25x + 2 = 0$$

$a = -0{,}125$

$b = 0{,}25$

$c = 2$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= 0{,}25^2 - 4 \cdot (-0{,}125) \cdot 2$$
$$= 1{,}0625$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-0{,}25 \pm \sqrt{1{,}0625})}{(2 \cdot (-0{,}125))}$$

$\underline{\underline{x_1 = -3{,}12}}$ $\underline{\underline{x_2 = 5{,}12}}$